مقارنة بين المدخل الجبري والمدخل السنغافوري لرسم نموذج في حل المسائل الجبرية لدى تلاميذ المرحلة المتوسطة بالمملكة العربية السعودية

أ.م.د. أبو الفتوح مختار القراميطي
كلية التربية بوادي الدواسر/ جامعة الأمير سطام بن عبد العزيز/ المملكة العربية السعودية (حاليًا)

A Comparison between Algebraic Approach and SingaporeModel Drawing Approach in Solving Algebraic Problems to Middle School Students in Saudi Arabia

Ass. Prof. Dr. Abo Al - Fotouh Mokhtar Al - Karmaiti
College of Education in Wadi Al-Dawasir\ Prince Sattam University\ Saudi Arabia
abou.2210@yahoo.com

Abstract

The purpose of this study was to compare Algebraic Approach and the Singapore Model Drawing Approach to solve verbal algebraic problems. an achievement test was conducted in the Algebraic Equation Unit and the Teacher's Guide to demonstrate how the Model Drawing Approach was used to solve verbal algebraic issues. The study population was selected from middle school students in Wadi Al-Dawasir governorate in Saudi Arabia, where a random sample of 82 students was selected, divided into two groups, the control group 40 students: they were studied The unit of algebraic equations using algebraic method, the experimental group 42 Students: they were studied the unit of algebraic equations using the Singapore drawing model.

The results revealed that there was a statistically significant difference at (α <0.05) between the mean of the control and experimental groups in the post-application of the achievement test in the unit of algebraic equations. Thus, the researcher concluded that the Singapore drawing model had a clear effect on raising students' level in the solution of algebraic equations. The study also indicated that low achievers in learning of mathematics also increased their motivation to solve equations by drawing Model, as other students.

Keywords: Algebraic Method–Model Drawing Approach in Singapore - Algebraic Equations Solving Algebraic Equations

الملخص

استهدفت الدراسة المقارنة بين المدخل الجبري Algebraic Approach ونموذج الرسم السنغافوري Model Drawing Approach في حل المسائل الجبرية اللفظية، ومن أجل تحقيق هدف الدراسة تم إعداد اختبار تحصيلي في وحدة المعادلات الجبرية ودليل المعلم لشرح كيفية استخدام نموذج الرسم السنغافوري Model Drawing Approach في حل المسائل الجبرية اللفظية. وتم اختيار مجتمع الدراسة من تلاميذ المرحلة المتوسطة بمحافظة وادي الدواسر بالمملكة العربية السعودية، حيث تم اختيار عينة عشوائية منهم بلغت (82) تلميذًا، تم تقسيمهم إلى مجموعتين، ضابطة (40) تلميذًا: درست وحدة المعادلات الجبرية باستخدام الطريقة الجبرية، تجريبية (42) تلميذًا: درست وحدة المعادلات الجبرية باستخدام نموذج الرسم السنغافوري.

وأسفرت نتائج الدراسة عن وجود فرق دال إحصائيًا عند مستوى $(\alpha < 0.05)$ بين متوسطي درجات المجموعة الضابطة والتجريبية في التطبيق البعدي للاختبار التحصيلي في وحدة المعادلات الجبرية. وبالتالي توصل الباحث إلى أن نموذج الرسم السنغافوري كان له أثر واضح في رفع مستوى التلاميذ في حل المعادلات الجبرية، كما أشارت الدراسة إلى إقبال التلاميذ منخفضي التحصيل على تعلم الرياضيات وفق هذا المدخل كما هو الحال بالنسبة للطلاب المتفوقين، كما زادت دافعيتهم نحو حل المعادلات باستخدام رسم نموذج، وذلك من خلال نتائج المقابلات الجماعية مع التلاميذ، والمعلمين المنفذين لتجربة الدراسة.

الكلمات المفتاحية: الطريقة الجبرية – نموذج الرسم السنغافوري – حل المعادلات الجبرية.

المقدمة:

في عام 1983م، صنفت سنغافورة في الترتيب السابع عشر من أصل 26 دولة اشتركت في المسابقة الدولية في الرياضيات في الصف الثامن (الثالث متوسط). وبعد تطوير مناهج الرياضيات حدثت طفرة في مستوى الطلاب في الفهم العميق للرياضيات، وبعد اثني عشر عاما فقط، وفي عام 1995م بالتحديد، احتلت سنغافورة المرتبة الأولى من بين 41 بلدًا شاركت في مسابقة دراسة الاتجاهات الدولية للرياضيات والعلوم[1](TIMSS). (Bisk, 2007, 5)

ومنذ عام 1995م حتى 2015م، وطلاب سنغافورة يصنفون باستمرار بين أفضل الدول في المسابقة العالمية (TIMSS)، والواقع أن سنغافورة احتلت المرتبة الأولى بفضل الجهود المبذولة في تطوير مناهج الرياضيات بصفة دورية، واختيار نخبة من المعلمين المهرة والمدربين على أعلى مستوى.(Reimers et al., 2017, 41)

ولقد حفزت هذه النتائج العديد من الدول، منها الولايات المتحدة الأمريكية لدراسة أسرار تفوق الطلاب السنغافوريين في الرياضيات، للاستفادة من التجربة السنغافورية في التعليم في تصميم المناهج، وتطوير طرق التدريس، وإعداد الأساتذة المتمكنين اللذين يسهمون في صقل المواهب وتنمية القدرات.

فمن خلال دراسة أجريت بهدف المقارنة بين طبيعة مناهج الرياضيات في دولتي الولايات المتحدة وسنغافورة، توصلت إلى مجموعة نتائج من أهمها ما تم إيجازه في عبارة لخصت الفارق الكبير بين المنهجين، وهو: أن مناهج الرياضيات في الولايات المتحدة تتميز بكثرة الموضوعات وقلة العمق في كل موضوع More in breadth less in depth، بينما ركزت مناهج الرياضيات في سنغافورة على عمق الفهم الإدراكي وقلة الموضوعات Less in breadth more in depth. (Ginsburg& et al., 2005, 61)

ولعل ما يتميز به تنظيم مناهج الرياضيات في سنغافورة في ضوء خمسة معايير رئيسة، وهي: الفهم الإدراكي Conceptual Understanding، الطلاقة الإجرائية Procedural Fluency، الكفاءة الاستراتيجية Strategic Competence، التفكير التكيفي Adaptive Reasoning، والتنظيم الإنتاجي Productive Disposition. وتلك المعايير التي نادى بها المجلس القومي للبحوث عام 2001م. (Leinwand& Ginsburg, 2007, 33)

كما يتم الاعتماد على طرائق تدريس قائمة على النظرية البنائية في التدريس، حيث تتمحور هذه الطرائق حول التعلم ذي المعنى القائم على الفهم العميق لمفاهيم الرياضيات، والذي يعتمد على نشاط المتعلم في بناء معرفته، ومن أشهر الطرائق التي لاقت قبولًا وانتشارًا في تعليم الرياضيات في سنغافورة ما يسمى مدخل رسم نموذج Model Drawing Approach. (Leinwand& Ginsburg, 2007, 33)

مشكلة الدراسة وتساؤلاتها:

تمثلت مشكلة الدراسة في وجود قصور لدى تلاميذ المرحلة المتوسطة بالمملكة العربية السعودية في حل المعادلات الجبرية بصفة عامة والمعادلات اللفظية بصفة خاصة، الأمر الذي قد يؤثر على تعلمهم المستقبلي للرياضيات واتجاهاتهم نحوها في المراحل الدراسية المقبلة. ومن خلال تتبع الدراسات السابقة في مجال تدريس الرياضيات، تبين للباحث وجود مدخل حديث في تدريس الرياضيات يعتمد على رسم الوحدات المستطيلة، انتشر استخدامه في دول عديدة على رأسها سنغافورة.

أمكن تحديد مشكلة الدراسة في الإجابة عن السؤال الرئيس الآتي:

أي من المداخل التدريسية (المدخل الجبري – المدخل السنغافوري لرسم نموذج) أكثر فاعلية في حل المسائل الجبرية لدى تلاميذ المرحلة المتوسطة بالمملكة العربية السعودية؟

وينبثق عن هذا السؤال الأسئلة الفرعية التالية:

1 TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study

1. هل يوجد فرق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية والضابطة في اختبار المعادلات الجبرية يعزى لطريقة الحل (جبرية رمزية – رسم نموذج)؟
2. هل توجد فاعلية بدرجة مقبولة لمدخل رسم نموذج في تنمية مهارات حل المعادلات الجبرية لدى تلاميذ المرحلة المتوسطة؟
3. ما معتقدات المعلمين منفذي تجربة الدراسة حول مدخل رسم نموذج؟
4. ما معتقدات التلاميذ في المجموعة التجريبية من عينة الدراسة حول مدخل رسم نموذج؟

أهداف الدراسة:

هدفت الدراسة المقارنة بين المدخل الجبري والمدخل السنغافوري لرسم نموذج Model Drawing Approach في حل المعادلات الجبرية لدى تلاميذ المرحلة المتوسطة بالمملكة العربية السعودية.

أهمية الدراسة:

تتمثل أهمية الدراسة فيما يلي:

- تزويد معلمي الرياضيات بأفضل المداخل التدريسية لحل المعادلات الجبرية.
- لفت انتباه مخططي مناهج الرياضيات لمثل هذه المداخل الحديثة؛ لتضمينها في المناهج وتدريب المعلمين عليها.
- تزويد الباحثين بطريقة حديثة في حل المعادلات الجبرية.
- إفادة المسئولين عن برامج إعداد معلمي الرياضيات بكليات التربية بتضمين مقررات طرائق التدريس لهذه المداخل الحديثة في تدريس الرياضيات. وهذا بدوره يلفت انتباه معلمي المستقبل إلى أهمية توظيف مداخل فعَّالة لتدريس الرياضيات.

مصطلحات الدراسة:

- **الطريقة الجبرية لحل المعادلات الجبرية:**

هي الطريقة التقليدية المتبعة في حل المعادلات الجبرية، حيث يتم افتراض رموز معينة مثل (س، ص، ...) للتعبير عن المتغيرات الواردة في المسائل اللفظية، ثم يتم تكوين معادلات جبرية في ضوء العلاقات بين المتغيرات، ثم حل هذه المعادلات والتوصل لقيم معينة لهذه المتغيرات.

- **نموذج الرسم السنغافوري:**

هو مدخل سنغافوري يتكون من سبع خطوات للتعامل مع المسائل التي تتضمن معادلات جبرية، ويستخدم النموذج لإنشاء "معادلات مصورة" عن طريق تسمية المستطيلات بحرف لتمثيل كميات غير معروفة، وتشبه المعادلات المصورة التمثيل ببلاط الجبر Algebra Tiles. بدلًا من اعتماد الحل على الرموز مباشرةً، والتركيز على استخدام الخوارزميات لحل المشكلة، أو ترجمة العبارات الرئيسة للمشكلة مباشرة إلى تمثيلات رمزية. ونموذج الرسم يُجبر الطلاب على التركيز على فهم المشكلة أولًا، ومن ثم، تحديد العمليات الحسابية المناسبة من خلال قراءة النمذجة المستطيلة. (Clobanu, 2015, 17)

حدود الدراسة:

التزم الباحث بالحدود التالية:

- تطبيق الدراسة على مجموعة من تلاميذ الصف الثاني المتوسط بثلاث مدارس من مدارس إدارة التعليم بمحافظة وادي الدواسر بالمملكة العربية السعودية.
- اختيار الوحدة السابعة (المعادلات والمتباينات) المتضمنة في كتاب الرياضيات المقرر على الصف الثاني المتوسط في الفصل الدراسي الثاني من العام الدراسي 1438هـ / 1439 هـ.

منهجية الدراسة:

استخدم الباحث في إعداد هذه الدراسة المنهجين التاليين: المنهج الوصفي، والمتمثل في جمع المادة العلمية والاستفادة من الدراسات السابقة، والمنهج شبه التجريبي، المتمثل في صياغة وحدة المعادلات باستخدام مدخل الرسم السنغافوري وتدريسها لمجموعة تجريبية ومقارنة مستواهم بأقرانهم في المجموعة الضابطة الذين يدرسون الوحدة بالطريقة الجبرية المتضمنة في كتب الرياضيات السعودية.

الإطار النظري

الجَبْر هو فرع من علم الرياضيات، وجاء اسم **الجبر** من كتاب عالم الرياضيات والفلكي والرحالة محمد بن موسى الخوارزمي (الكتاب المختصر في حساب **الجبر** والمقابلة) الذي قدم العمليات الجبرية التي تنظم إيجاد حلول للمعادلات الخطية والتربيعية، **والجبر** هو مفهوم أوسع وأشمل من الحساب أو **الجبر** الابتدائي. (ويكيبيديا، الموسوعة الحرة) (https://ar.wikipedia.org/wiki, 2018)

وهو فرع الرياضيات الذي يتعامل مع جمل عامة من العلاقات، باستخدام مجموعة من الأحرف والرموز لتمثيل مجموعة محددة من الأعداد، والقيم، والأبعاد، إلخ؛ لوصف مثل هذه العلاقات. (Dictionary.reference.com, 2018)

والجبر يتضمن التعامل مع الأنظمة العددية والعمليات عليها، كما يهتم بتكوين صيغ وعبارات ومعادلات رياضية تعبر عن مواقف من الحياة العملية، ومحاولة إيجاد حل لمثل هذه المعادلات باستخدام إجراءات محددة، والقدرة على التعبير عن الحل في شكل جداول ورسوم، إلخ. (Arcavi et al., 2017, 14)

الجبر مادة علمية تتعامل مع التعبيرات مع الرموز والأرقام الممتدة إلى ما وراء الأعداد الكاملة من أجل حل المعادلات، تحليل العلاقات الدالة، وتحديد بُنى النظام التمثيلي الذي يتكون من التعبيرات والعلاقات. ومع ذلك، فإن الأنشطة مثل: حل المعادلات وتحليل العلاقات الدالة وتحديد البنية ليست الهدف من الجبر، بل هي أدوات لنمذجة ظواهر العالم الحقيقي وحل المشكلات المتعلقة بالمواقف المختلفة. (Lew, 2004, 92)

ويعدُّ تعلم الجبر مفتاح تعلم الرياضيات في الصفوف العليا، وعلى الرغم من ذلك توجد مؤشرات قوية تدل على مواجهة التلاميذ بعض الصعوبات عند تحولهم من تعلم الحساب Arithmetic إلى تعلم الجبر Algebra، وخاصة عند محاولتهم لتكوين معادلات جبرية من مسائل لفظية.(Gasco& Villarroel, 2012, 615)

ولقد أشارت العديد من الدراسات العربية والأجنبية إلى جملة من الصعوبات التي تواجه تلاميذ المرحلة المتوسطة (التلاميذ الذين تتراوح أعمارهم بين 13 – 15 سنة) عند دراستهم للجبر، وفيما يلي يتم عرض بعضها:

أشار بويج Puig (2010) في دراسته إلى أن تلاميذ المرحلة المتوسطة يقبلون على دراسة الجبر ولديهم تصورات خاطئة حول المفاهيم والمصطلحات الأساسية المتعلقة بالجبر، والتي تؤثر سلبًا على فهم وتكوين المعادلات الجبرية، فضلًا عن حلها. (Puig, 2010, 4)

كما أشارت بعض الدراسات إلى أن التلاميذ في بداية تعاملهم مع الجبر يواجهون بعض الصعوبات في الفهم الإدراكي للجمل الجبرية، فضلًا عن أنهم لا يستطيعون تحديد نقطة البداية للتعامل مع المعادلات والجمل الجبرية. (Arcavi et al., 2017, 18)

وقد توصلت دراسة غفور (2012) إلى وجود صعوبات عديدة لدى الطلاب عند تعلمهم للرياضيات، وقد يرجع ذلك لأحد الأسباب التالية: إهمال كثير من الطلبة في متابعة مادة الرياضيات والمثابرة على مراجعة القوانين وحل التمارين في البيت، عدم كفاءة بعض المدرسين والمدرسات في إيصال مادة الدرس إلى الطلبة وافتقارهم إلى طرائق تدريس مناسبة عند شرح الموضوعات، بعض المدرسين والمدرسات لا يراعي الفروق الفردية بين الطلبة عند تدريسهم المادة، عدم متابعة أولياء أمور الطلبة لأولادهم مما يجعلهم لا

يبالون عند تغيبهم عن الدوام، عدم ثقة الطلبة بأنفسهم عند حل المسألة مما يجعلهم يخافون من الفشل وعدم المقدرة على إكمال الحل، وضعف أساس كثير من الطلبة في مادة الرياضيات.

وبالنظر إلى عامل اللغة، أشارت دراسة المجيدل واليافعي (2009) إلى أن من أهم الأسباب التي تسبب صعوبات في حل المعادلات الجبرية هو عدم تحدث أسر الطلاب باللغة العربية الصحيحة، وبالتالي يجد الطلاب صعوبة في فهم العبارات وترجمتها إلى معادلات جبرية.

كما أشارت دراسة ستاسي وماك جريجور Stacey& MacGregor (2009) إلى وجود صعوبات لدى أغلب التلاميذ في الانتقال من الحساب (التعامل مع الأرقام) إلى الجبر (التعامل مع الرموز المجردة)، وتم تحديد مجموعة أسباب تقف وراء هذه الصعوبات، من أهمها ما يلي:

- ضعف قواعد اللغة وفهم مفرداتها لدى التلاميذ.
- القصور في إدراك مفاهيم الرياضيات بشكل جيد.
- يتعامل الطلاب مع المعرفات أفضل من تعاملهم مع اللامعرفات.
- صعوبة تكوين معادلة جبرية من عبارات لفظية.
- عدم الالتزام بخوارزميات حل المعادلة الجبرية.

ولعلَّ هذه الأسباب قد تتزايد في المجتمعات العربية؛ بسبب الاتجاهات السلبية التي كوَّنها التلاميذ – خلال مراحل الدراسة – نحو الرياضيات، وقد يسهم في ذلك عدم تدريس الرياضيات بالشكل الذي يتناسب مع طبيعتها المجرَّدة، لذلك كان من الضروري البحث عن مداخل وطرائق تدريس تناسب مرحلة الانتقال من تدريس الحساب (المحسوس) إلى تدريس الجبر (المجرد).

من هنا كانت الحاجة لتجريب مداخل تدريس مناسبة لسد الفجوة بين دراسة كلٍ من الحساب والجبر، ومن أهم الدول التي تقدمت في هذا الجانب سنغافورة، التي أبهرت العالم بنظامها التعليمي بصفة عامة، ونمط تدريس الرياضيات بصفة خاصة، حيث أطلقت شعار (تدريس أقل تعلم أكثر The Teach Less, Learn More)، ولعل ما يميز أهداف تدريس الرياضيات في سنغافورة أنها تركز على ما يلي: (Kuar, 2014, 27)

- اكتساب مفاهيم ومهارات الرياضيات.
- تطوير المهارات المعرفية وفوق المعرفية من خلال المدخل الرياضي لحل المشكلة.
- تنمية اتجاهات إيجابية نحو الرياضيات.

ويعد مدخل رسم نموذج Model Drawing Approach، أو ما يعرف بـ "نمذجة المستطيل Bar Modelling"، هي الميزة الأكثر انتشارًا وتفردًا في مناهج الرياضيات في سنغافورة. وفي عام 1983م، قدمت وزارة التعليم في سنغافورة الشكل التخطيطي أو رسم نموذج في المناهج الدراسية للمدارس الابتدائية لمساعدة التلاميذ على حل المسائل الحسابية والجبرية التي تنطوي على الكسور fractions، والأعداد الكاملة whole numbers، والنسب ratios، والنسب المئوية percent. (Clobanu, 2015, 17)

وقد تم اكتشاف مدخل رسم نموذج Model Drawing Approach على يد معلم الرياضيات السنغافوري (هيكتور تشي Hector Chee)، وسرعان ما تم انتشاره في جميع مدارس سنغافورة، بدءًا من الصفوف الأولى للمرحلة الابتدائية حتى بداية المرحلة المتوسطة؛ نظرًا لسهولة استخدامه، وأنه محبب إلى التلاميذ. (Chou, 2012)

وقد ساهمت مراحل التعلم بالاكتشاف عند برونر في بناء هذا النموذج، حيث يتعامل التلاميذ مع ثلاثة مراحل من التمثيل: النص Text، والتصويرية Pictorial، والرمزية Symbolic. يحث يقوم التلاميذ بإنشاء رسم تخطيطي باستخدام مستطيلات؛ لتمثل الكميات المعروفة (المعطيات) وغير المعروفة (المجهول) المتضمنة في سياق المسألة. (Clobanu, 2015, 17)

ويستخدم النموذج لإنشاء "معادلات مصورة" عن طريق تسمية المستطيلات بحرف لتمثيل كميات غير معروفة، وتشبه المعادلات المصورة التمثيل ببلاط الجبرAlgebra Tiles . بدلًا من اعتماد الحل على الرموز مباشرةً، والتركيز على استخدام الخوارزميات لحل المشكلة، أو ترجمة العبارات الرئيسة للمشكلة مباشرة إلى تمثيلات رمزية. ونموذج الرسم يُجبر الطلاب على التركيز على فهم المشكلة أولًا، ومن ثم، تحديد العمليات الحسابية المناسبة من خلال قراءة النمذجة المستطيلة. (Clobanu, 2015, 17)

وقد أشارت سين Sin (2017) – في مقال لها في صحيفة (ستريس تايمز Straits Times) السنغافورية أن المدخل السنغافوري في تدريس الرياضيات أصبح شائعًا لدرجة أن عبارة "رياضيات سنغافورة" أصبحت عبارة مألوفة لدى المعلمين والطلاب في 14 دولة على الأقل، حتى جنوب إفريقيا وشيلي، وقد أظهرت الدراسات في بريطانيا والهند والولايات المتحدة أن درجات تلاميذ المرحلة الابتدائية في اختبارات الرياضيات قد تحسنت بشكل ملحوظ عندما تم تدريس الرياضيات بالطريقة السنغافورية. (Sin, 2017)

وفي مجال تجريب المدخل السنغافوري لرسم نموذج في التعليم المصري، فقد أشارت دراسة عبد الحي (2013) إلى فعالية المدخل في تنمية تحصيل التلاميذ ذوي صعوبات تعلم الرياضيات في الصف الرابع الابتدائي، وضرورة تقديم النموذج باستخدام الوسائط المتعددة الكمبيوترية (صور – عروض تقديمية – رسوم متحركة).

وتحقيقًا لنفس الهدف السابق أشارت دراسة مورين (2014) Morin إلى الدور الفعال الذي تلعبه استراتيجيات التدريس القائمة على رسم نموذج مستطيلي Bar Model Drawing مقارنة باستراتيجيات التدريس المعرفية في تنمية فهم المسائل اللفظية للتلاميذ ذوي صعوبات تعلم الرياضيات (students with math difficulties (MD بالمرحلة الابتدائية.

كما أكدت دراسة ماهوني (2012) Mahoneyعلى فعالية نموذج الرسم السنغافوري في تنمية حل المشكلات اللفظية لدى تلاميذ الصف الثالث والرابع الابتدائي، واعتمدت الدراسة على أسلوب التدخل على مدار 8 جلسات تدريبية، وبمجرد أن بدأت مرحلة التدخل باستخدام نموذج الرسم السنغافوري ارتفعت قدرة التلاميذ – بشكل كبير – على حل مشكلات لفظية تضمنت كلمات معقدة.

أما دراسة بلالوك (2011) Blalock فقد أكدت على أثر التدريس وفق المدخل السنغافوري على المعرفة والمتعة في الرياضيات طبقًا لتطبيق التجربة في إحدى مدارس لويزيانا الشمالية، وتم الاعتماد في جمع البيانات على اختبار قبلي وبعدي بالإضافة إلى ملأ استبيان عن طريق المعلمين، وكشفت النتائج عن وجود فرق ذو دلالة إحصائية لصالح التلاميذ الذين درسوا وفق المدخل السنغافوري بالنسبة لبعد "معرفة أكثر بمهارات الرياضيات" مقارنة بزملائهم في المجموعة الضابطة الذين درسوا الرياضيات بالطريقة التقليدية. في حين أن الدراسة لم تكشف عن فرق ذو دلالة إحصائية بين تلاميذ المجموعتين بالنسبة لبعد "المتعة في الرياضيات".

وبينت نتائج دراسة جيرمان (2010) Jermanتقدمًا ملحوظًا في دقة حل المسائل باستخدام طريقة التدريس القائمة على رسم نموذج في حل المشكلات الرياضية لمجموعة من الطلاب ذوي صعوبات التعلم في المدرسة العليا. وقد تبنت الباحثة التصميم التجريبي الفردي " "single–subject designللتدريس باستخدام مدخل رسم نموذج، تم استخدامه لحل مسائل عن الكسور والنسب المئوية.

وأوضحت دراسة تيرويل وآخرين (2009) .Terwel et alإلى أفضلية ترك الفرصة للتلاميذ لتصميم نماذج رسم لحل مسائل الرياضيات، وطبقت الدراسة على 239 من تلاميذ 10 مدارس بالمرحلة الابتدائية، وأسفرت نتائج الدراسة عن تفوق الطلاب الذين تركت لهم فرصة تصميم نماذج لحل مسائل الرياضيات على أقرانهم الذين تم تزويدهم بنماذج جاهزة من قبل المعلم بالنسبة لفهم الصور والأشكال والرسوم، وأن هؤلاء الطلاب قادرون على حل مسائل جديدة أكثر تعقيدًا مقارنة بزملائهم، وهذا ما أشارت إليه نتائج تطبيق الاختبار التتبعي .Transfer Test

ولم تقتصر فاعلية مدخل رسم نموذج على تنمية التحصيل لدى الطلاب، بل تعدى الأمر إلى أن هذا المدخل له أثر قوي في تنمية معلمي الرياضيات مهنيًا وتغيير العديد من مفاهيم الرياضيات والممارسات التدريسية لديهم، وهذا ما أشارت إليه دراسة آلين Allen (2008).

أما دراسة مينج (2008) Ming فقد أشارت إلى أهمية تدريب الطلاب على استراتيجيات متنوعة للتعامل مع مسائل الرياضيات، ومن أهم هذه الاستراتيجيات التي أكدت عليها الدراسة استراتيجية البحث عن نموذج، وتقديم مسائل واقعية من حياة الطلاب، بحيث يتعاون الطلاب فيما بينهم لفهم المشكلة ويعيشون أحداثها ويدركون العلاقات بين متغيراتها، فيكون ذلك مثيرًا لدافعيتهم نحو حل المسألة. واعتمد الباحث على النموذج العام لحل مسائل الرياضيات، وشكل (1) يوضح ذلك. (Ming, 2008, 50-51)

وقد أكدت العديد من الدراسات على أهمية الاستعانة بالرسم في تعليم وتعلم الرياضيات، ومن هذه الدراسات دراسة Wolfe (2003)، حيث أشارت إلى أهمية تدعيم مناهج الرياضيات والعلوم بالرسوم والفنون المتعددة. Integrating Art in Math and Science Curriculum، واستهدفت الدراسة تصميم وحدة تعليمية تضم الرياضيات والعلوم والفنون لطلاب الصف السادس الابتدائي، وقد استغرقت دراسة الوحدة بأكملها حوالي أسبوعين بما في ذلك رحلة إلى معهد دايتون للفنون بمدينة أوهايو بالولايات المتحدة الأمريكية. وتسمح دراسة هذه الوحدة للتلاميذ بتطبيق مفاهيم الرياضيات والعلوم من خلال تصميم قطعة من العمل الفني. كما تهدف الوحدة تحدي التلاميذ لاستخدام ما تعلموه من مهارات في الفصل الدراسي لتقييم موضوع في مجال آخر. كما يجب على التلاميذ أيضا استخدام مهارات التصور البصري وتكنولوجيا الكمبيوتر لإكمال دراسة الوحدة بنجاح. وهذه الوحدة تتضمن دراسة الخطوط والزوايا، والأشكال الهندسية، والمجسمات ثلاثية الأبعاد، بالتكامل مع المهارات المتطلبة في العلوم والفن.

وقد أشارت العديد من الدراسات أن تلاميذ المرحلة الابتدائية في سنغافورة ماهرون في استخدام رسم نموذج المستطيل في حل مسائل الرياضيات، ولكنهم إذا انتقلوا إلى المرحلة التالية وجدوا صعوبات في حل المعادلات الرياضية جبريًا (باستخدام لغة الرموز الجبرية)، ولقد انتبه بعض الباحثين في سنغافورة إلى مثل هذه المشكلات في تطبيق نموذج الرسم، فقام الباحثان لووي وليم Looi& Lim (2009) بتصميم وتجريب برمجية حاسوبية، والتي أطلقا عليها (AlgeBAR) لسد الفجوة بين الحل عن طريق الرسم والحل جبريًا، وقد تم تجريب الدراسة على 68 طالبًا من طلاب الصف الأول الثانوي، مقسمين إلى 34 طالبًا (مجموعة ضابطة) و34 طالبًا (مجموعة تجريبية). وقد أوضحت نتائج الدراسة أن طلاب المجموعة التجريبية الذين درسوا البرمجية بجانب الطريقة المعتادة في الحل حققوا إنجازًا كبيرًا في الاختبار البعدي مقارنة بزملائهم في المجموعة الضابطة الذين درسوا وحدة الرياضيات بدون تدخل البرمجية.

أهمية المدخل السنغافوري لرسم نموذج في تعلم الرياضيات:

من خلال استقراء الدراسات السابقة لخص الباحث أهمية هذا المدخل في تعلم الرياضيات في العناصر التالية:

- يعد مدخلا مناسبًا لمساعدة التلاميذ لفهم وحل المسائل اللفظية.
- يفيد هذا المدخل في المرحلة التصويرية من مراحل التعلم بالاكتشاف، حيث تأتي قبلها المرحلة الحسية ويأتي بعدها المرحلة المجردة.
- يسهم هذا المدخل في تنمية كل من التفكير البصري والجبري.
- يفيد هذا المدخل في إحداث تعلم ذي معنى من خلال تعزيز المهارات العليا للتفكير والمهارات الحسابية بالإضافة إلى الرياضيات الذهنية.
- يمكن استخدام هذا النموذج بشكل مستمر طوال تعلم وتعليم الرياضيات
- يتميز هذا المدخل بسهولة رسم الوحدات المستطيلة وسهولة تقسيمها.
- كما يتميز هذا المدخل بتمثيل الأعداد الكبيرة.
- كما أن له دور كبير في إيضاح العلاقات التناسبية بين الكميات والأعداد.

خطوات المدخل السنغافوري لرسم نموذج:

يتكون المدخل من سبع خطوات أساسية، يمكن استخدامها في حل المعادلات الجبرية، هي: (Morin, 2014, 133)

1. قراءة المسألة كاملة.
2. تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).
3. رسم نموذج للوحدات المستطيلة.
4. قراءة المسألة مرة أخرى مع التوقف عند كل جملة، مع وضع المعطيات على الرسم.
5. وضع علامة (؟) في المستطيل الذي يعبر عن المجهول.
6. تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.
7. صياغة الحل في جملة تامة.

الأنماط العامة لرسم نموذج لحل المعادلات الجبرية: Common Model Structures

لقد ركز بعض التربويين على ثلاثة أشكال أساسية لاستخدام رسم نموذج Model Drawing في تدريس مناهج الرياضيات في المرحلة الابتدائية في سنغافورة، وهي: تمثيل الجزء والكل Part–Whole، تمثيل المقارنة Comparison، وتمثيل الضرب والقسمة Multiplication and Division. (Ng & Lee, 2009, 287)

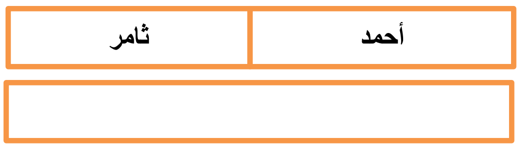
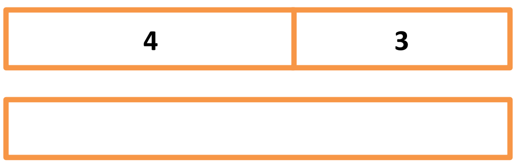
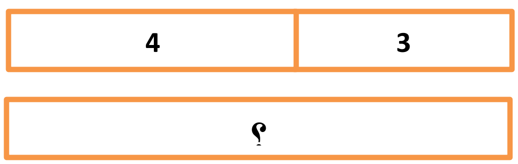
وقد أشارت مورين Morin (2014) في دراستها إلى تسعة أنماط أساسية لتمثيل مسائل الرياضيات باستخدام رسم نموذج Model Drawing، هي: التغيرChange، التجميع Group، المقارنة Compare، المقارنة المتعددة Multiplicative Compare، التنوع Vary، الجزء والكل Part–Whole، التناسب Proportion، النسبة Ratio، والجمع والطرح متعدد الخطوات Multistep addition and subtraction. (Morin, 2014)

وبهذا يتضح أن مورين Morin قد اتفقت مع شوا Chua، الذي أطلق على هذه الأنماط مجموعة مفاهيم معينة على التمكن من استخدام رسم نموذج Model Drawing بمهارة، ولأهميتها في تدريس الرياضيات يتم عرضها فيما يلي بالتفصيل: (Chua, 2012)

أولاً: مفهوم الجزء والكل: Part–Whole Concept

مثال: يمتلك أحمد ثلاثة أقلام، ويمتلك ثامر أربعة أقلام. فكم عدد الأقلام معهما معًا؟

إجراءات الحل:

م	خطوات رسم نموذج	أداء الطالب
1	قراءة المسألة كاملة.	....
2	تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).	الأشخاص: أحمد – ثامر الأشياء: أقلام
3	رسم نموذج بالوحدات المستطيلة.	
4	قراءة المسألة مرة أخرى مع التوقف عند كل جملة، مع وضع المعطيات على الرسم وتعديله في ضوء المعطيات.	
5	وضع علامة (؟) في المستطيل الذي يعبر عن المجهول.	
6	تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.	الأجزاء معلومة والكل مجهول فتصبح العملية الحسابية (جمع) المجهول = 3 + 4 = 7
7	صياغة الحل في جملة تامة.	أحمد وثامر لديهما سبعة أقلام

ثانيًا: مفهوم التغير: Change Concept

مثال: لدى مبارك أربعة ريالات. أعطاه والده ريالان. كم أصبح لديه الآن.

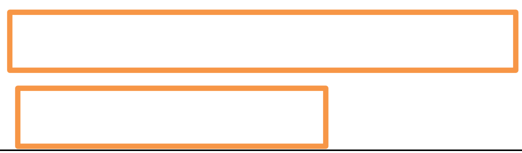
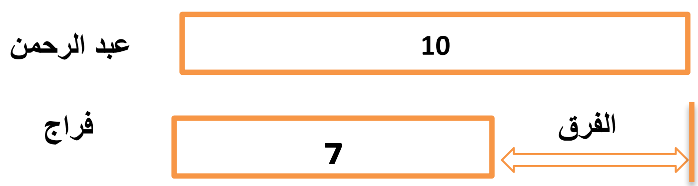
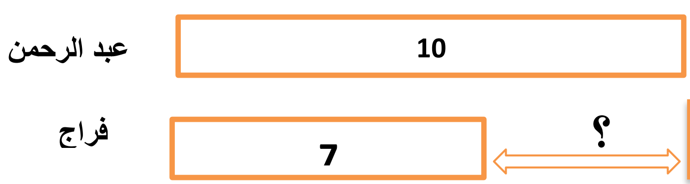
إجراءات الحل:

خطوات رسم نموذج	أداء الطالب
قراءة المسألة كاملة.	....
تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).	الأشخاص: مبارك – والده الأشياء: ريالات
رسم نموذج بالوحدات المستطيلة.	مبلغ أصلي | الزيادة (التغير) القيمة الجديدة
قراءة المسألة مرة أخرى مع التوقف عند كل جملة، مع وضع المعطيات على الرسم.	4 | 2 القيمة الجديدة
وضع علامة (؟) في المستطيل الذي يعبر عن المجهول.	4 | 2 ؟
تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.	المبلغ الأصلي + الزيادة = المبلغ الجديد فتصبح العملية الحسابية (جمع) المجهول = 4 + 2 = 6
صياغة الحل في جملة تامة.	أصبح لدى مبارك الآن ست ريالات

ثالثًا: مفهوم المقارنة: Comparison Concept

المسألة الثالثة: حصل عبد الرحمن على 10 درجات في اختبار الرياضيات، بينما حصل فراج على 7 درجات. أيهما أكثر وبكم؟

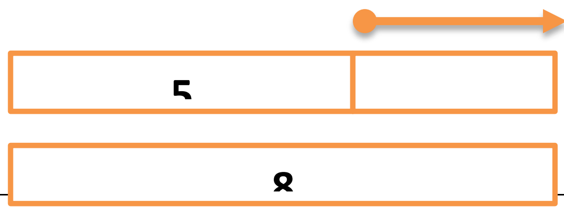
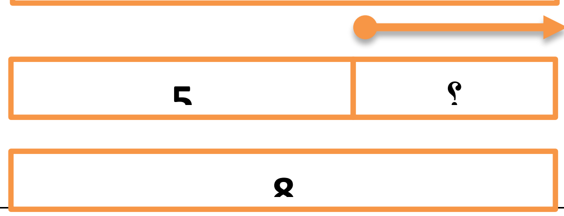
إجراءات الحل:

خطوات رسم نموذج	أداء الطالب
قراءة المسألة كاملة.	....
تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).	الأشخاص: عبد الرحمن – فراج الأشياء: درجات
رسم نموذج بالوحدات المستطيلة.	
قراءة المسألة مرة أخرى مع التوقف عند كل جملة، مع وضع المعطيات على الرسم.	
وضع علامة (؟) في المستطيل الذي يعبر عن المجهول.	
تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.	هذه عملية مقارنة، وبالتالي يكون هناك أكبر وأصغر. الفرق = الأكبر – الأصغر = 10 – 7 = 3
صياغة الحل في جملة تامة.	حصل عبد الرحمن على درجة أعلى من درجة فراج بمقدار 3 درجات.

رابعًا: مفهوم المكان الفارغ: Place Holder Concept

مثال: أوجد العدد المناسب مكان الفراغ 5 + ... = 8

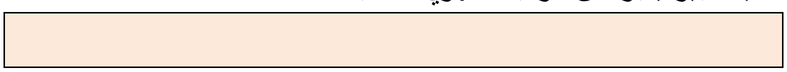
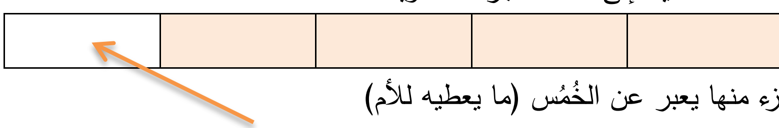
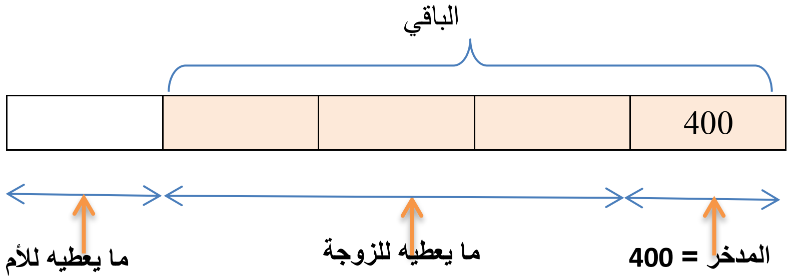
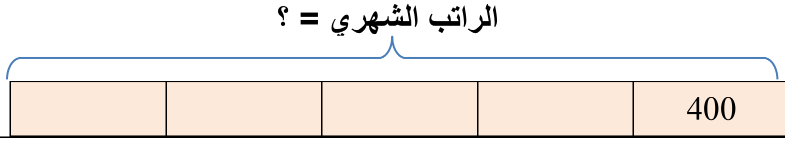
إجراءات الحل:

خطوات رسم نموذج	أداء الطالب
قراءة المسألة كاملة.	....
تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).	في هذه الحالة نتعامل مع أعداد فقط
رسم نموذج بالوحدات المستطيلة يعبر عن العدد 5.	
نضع نقطة عند نهاية المستطيل ثم نرسم سهما نحو اليمين لأن الرمز (+) (ولو كان (−) نرسم سهما نحو اليسار، ثم نرسم مستطيلا يعبر عن القيمة المفقودة.	
وضع علامة (؟) في المستطيل الذي يعبر عن القيمة المفقودة.	
تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.	حيث أن الكل معلوم والجزء مجهول، فتصبح العملية الحسابية (طرح) المجهول = 8 − 5 = 3
صياغة الحل في جملة تامة.	5 + 3 = 8

خامسًا: مفهوم الباقي: Remainder Concept

مثال: يتقاضى "عبد الله" راتبًا شهريًا، يعطي أمه خُمُسَ هذا الراتب ويعطي ثلاثة أرباع الباقي لزوجته، ويدخر 400 ريالاً. فكم يكون راتبه الشهري؟

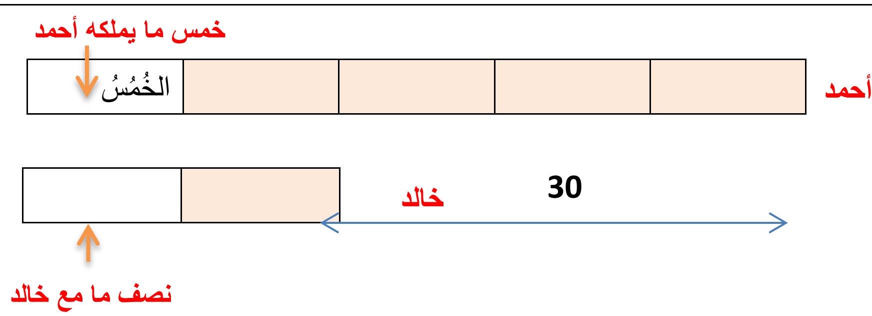
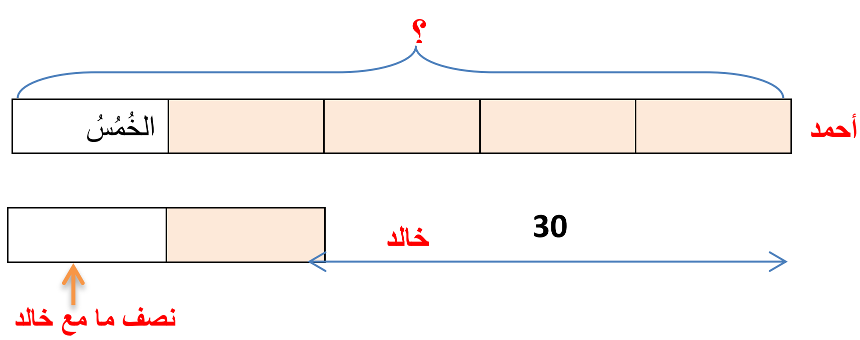
إجراءات الحل:

خطوات رسم نموذج	أداء الطالب
قراءة المسألة كاملة.	خلال القراءة نستخرج بعض الكلمات التي تحتاج توضيح، مثل: "خُمُس – ثلاثة أرباع"
تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).	الأشخاص: عبد الله – أمه – زوجته الأشياء: راتب شهري بالريال
رسم نموذج بالوحدات المستطيلة.	نرسم مستطيل كبير يعبر عن الراتب الشهري ل "عبد الله"  ثم نقسم هذا المستطيل إلى خمسة أجزاء متساوية:  فيكون جزء منها يعبر عن الخُمُس (ما يعطيه للأم)
قراءة المسألة مرة أخرى مع التوقف عند كل جملة، مع وضع المعطيات على الرسم.	
وضع علامة (؟) في المستطيل الذي يعبر عن المجهول.	
تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.	حيث أن المستطيل الذي يعبر عن الراتب الشهري مقسم إلى أجزاء متساوية، وقيمة جزء منه = 400 ريالاً ∴ قيمة الراتب الشهري = 5 × 400 = 2000 ريالاً
صياغة الحل في جملة تامة.	الراتب الشهري لـ "عبد الله" = 2000 ريالاً

سادسًا: مفهوم الكميات المتساوية: Equal quantities Concept

مثال: إذا كان خُمُسُ ما يملكه أحمد يساوي نصف ما يملكه خالد، وكان ما يملكه أحمد يزيد عما يملكه خالد بمقدار 30 ريالاً. فما قيمة ما يملكه كل منهما؟

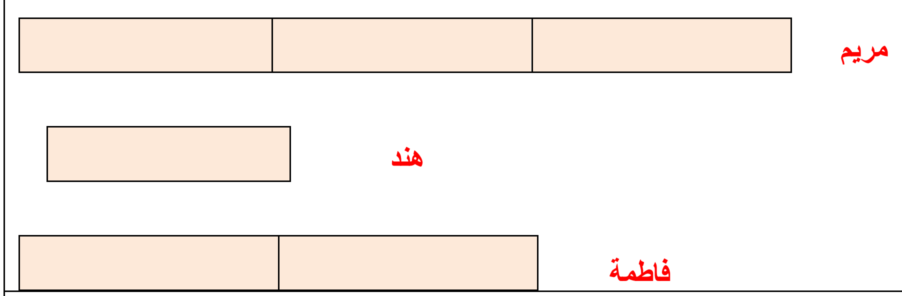
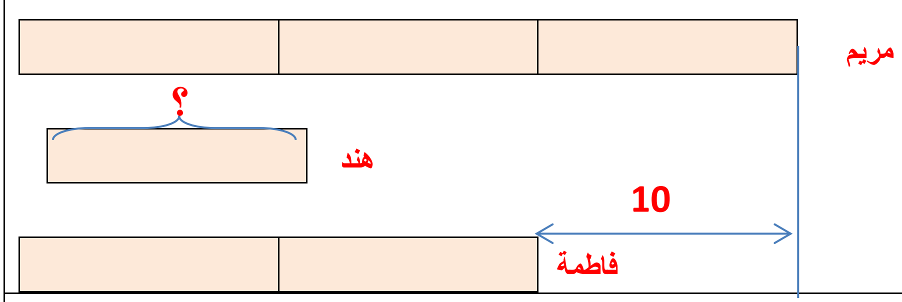
إجراءات الحل:

خطوات رسم نموذج	أداء الطالب
قراءة المسألة كاملة.	نستخرج بعض الكلمات التي تحتاج توضيح، مثل: "خُمُس – نصف"
تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).	الأشخاص: أحمد – خالد الأشياء: ريالات (عُملة)
رسم نموذج بالوحدات المستطيلة.	نرسم مستطيل كبير يعبر عما مع أحمد، ثم نقسمه إلى خمسة أجزاء متساوية 
قراءة المسألة مرة أخرى مع التوقف عند كل جملة، مع وضع المعطيات على الرسم.	
وضع علامة (؟) في المستطيل الذي يعبر عن المجهول.	
تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.	حيث أن الفرق بين ما مع أحمد وما مع خالد = 30 ∴ قيمة كل جزء = 30 / 3 = 10 ريالات ∴ ما مع أحمد = 10×5 =50
صياغة الحل في جملة تامة.	وبالتالي يصبح ما يملكه أحمد = 50 ريالاً وما يملكه خالد = 2×10=20 ريالاً

سابعًا: مفهوم المتغير المتكرر: Repeated Variable Concept

مثال: إذا كانت درجة مريم ثلاثة أضعاف هند، ودرجة فاطمة ضعف هند، فإذا كانت درجة مريم تزيد عن درجة فاطمة بمقدار 10 درجات. فكم تكون درجة هند؟.

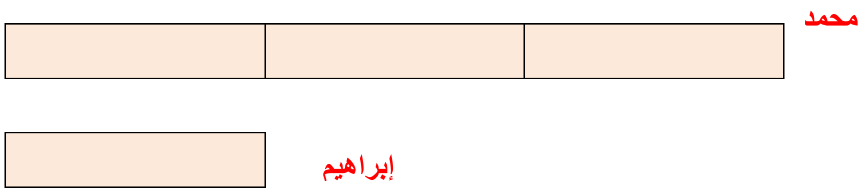
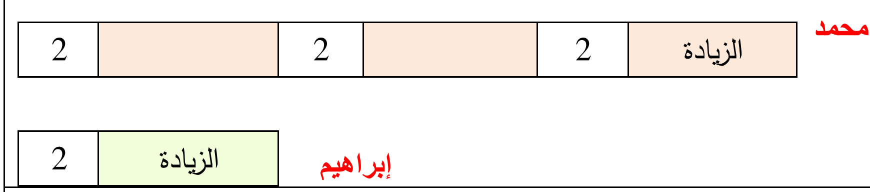
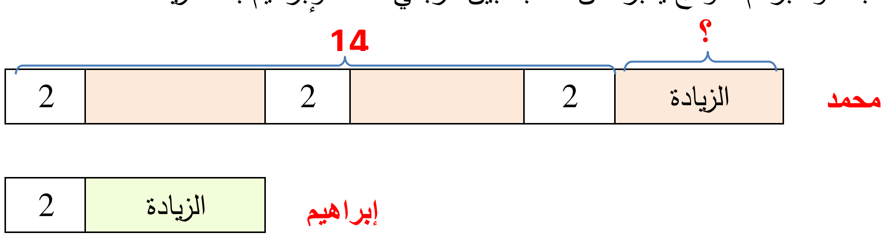
إجراءات الحل:

خطوات رسم نموذج	أداء الطالب
قراءة المسألة كاملة.	نستخرج بعض الكلمات التي تحتاج توضيح، مثل: "ثلاثة أضعاف – ضِعف"
تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).	الأشخاص: مريم – فاطمة – هند الأشياء: درجات
رسم نموذج بالوحدات المستطيلة يعبر عما لدى كل منهن.	
قراءة المسألة مرة أخرى مع التوقف عند كل جملة، مع وضع المعطيات على الرسم، ووضع علامة (؟) عند المجهول	
تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.	على ضوء النموذج يتبين أن درجة مريم = 10×3 = 30 درجة درجة هند = 10×1 = 10 درجات درجة فاطمة = 10×2 = عشرون درجة
صياغة الحل في جملة تامة.	درجة هند = 10 درجات

ثامنًا: مفهوم الفرق الثابت: Constant Difference Concept

مثال: في أحد الاختبارات حصل "محمد" على 14 درجة، وحصل "إبراهيم" على درجتان فقط، ثم أعطى المعلم كلا منهما عدد من الدرجات فأصبحت النسبة بين درجة "محمد" إلى درجة "إبراهيم" تساوي 3 : 1. كم درجة أعطاها المعلم لكل منهما؟

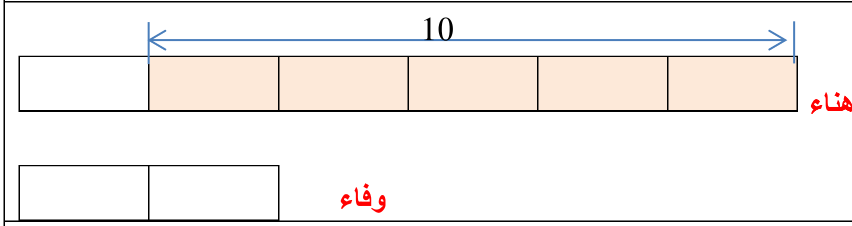
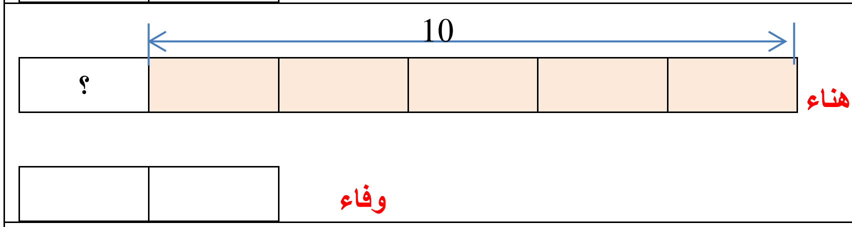
إجراءات الحل:

<table>
<tr><th>خطوات رسم نموذج</th><th>أداء الطالب</th></tr>
<tr><td>قراءة المسألة كاملة.</td><td>نستخرج بعض الكلمات التي تحتاج توضيح، مثل: النسبة ....</td></tr>
<tr><td>تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).</td><td>الأشخاص: المعلم – محمد – إبراهيم
الأشياء: درجات</td></tr>
<tr><td>رسم نموذج بالوحدات المستطيلة.</td><td>نبدأ أولاً برسم نموذج يعبر عن النسبة بين درجتي علاء وإبراهيم بعد الزيادة:
</td></tr>
<tr><td>قراءة المسألة مرة أخرى مع التوقف عند كل جملة، مع وضع المعطيات على الرسم.</td><td>نبدأ أولاً برسم نموذج يعبر عن النسبة بين درجتي علاء وإبراهيم بعد الزيادة:
</td></tr>
<tr><td>وضع علامة (؟) في المستطيل الذي يعبر عن المجهول.</td><td>نبدأ أولاً برسم نموذج يعبر عن النسبة بين درجتي علاء وإبراهيم بعد الزيادة:
</td></tr>
<tr><td>تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.</td><td>صندوقين = 14 – (2 + 2 + 2) = 14 – 6 = 8
∴ قيمة الزيادة = 8 ÷ 2 = 4 درجات</td></tr>
<tr><td>صياغة الحل في جملة تامة.</td><td>أعطى المعلم لكل منهما 4 درجات</td></tr>
</table>

تاسعًا: مفهوم الكمية الثابتة: Constant Quantity Concept

مثال: لدى هناء عدد من القبعات ثلاثة أضعاف وفاء، وبعد إعطاء هناء 10 قبعات لأختها الصغيرة صار لديها نصف عدد القبعات التي مع وفاء. كم كان لدى كل منهما في البداية؟

إجراءات الحل:

خطوات رسم نموذج	أداء الطالب
قراءة المسألة كاملة.	نستخرج بعض الكلمات التي تحتاج توضيح، مثل: ثلاثة أضعاف – نصف
تحديد ماذا ومن (أي: تحديد الأشياء والأشخاص الوارد ذكرها في المسالة).	الأشخاص: هناء – وفاء الأشياء: قبعات
رسم نموذج بالوحدات المستطيلة.	التمثيل في البداية 
قراءة المسألة مرة أخرى مع التوقف عند كل جملة، مع وضع المعطيات على الرسم.	
وضع علامة (؟) في المستطيل الذي يعبر عن المجهول.	
تحديد العمليات الحسابية، ثم تنفيذها.	قيمة كل صندوق صغير = 10 ÷ 5 = 2 يصبح لدى وفاء = 2 × 2 = 4 قبعات (لاحظ أن ما لديها لم يتغير)
صياغة الحل في جملة تامة.	كان لدى هناء في البداية = 2 × 6 = 12 قبعة

المقارنة بين الطريقة الجبرية وطريقة رسم نموذج:

مثال3 ص64 بكتاب الرياضيات المقرر على الصف الثاني المتوسط:

اشترى خالدُ جهازًا إلكترونيًا بمبلغ 816 ريالًا، بحيث يدفع 51 ريالًا شهريًّا. أوجد عدد الأقساط التي دفعها خالد، إذا كان متبقيًا عليه 357 ريالًا.

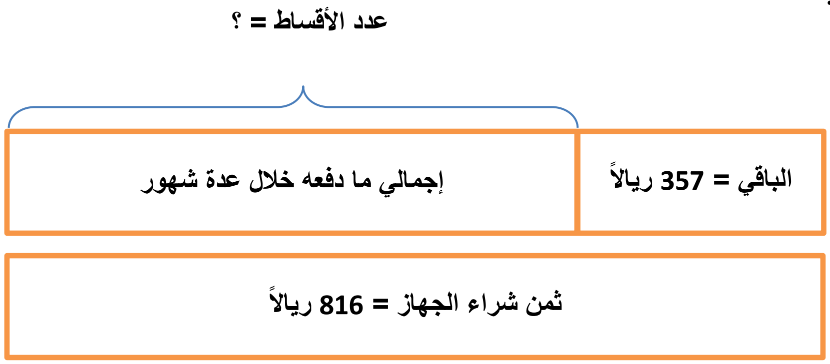
أولاً: الطريقة الجبرية:

نفترض أن "س" عدد الأقساط التي دفعها خالد.

إذًا: 357 = 816 − 51 × س ===== 51س = 816 − 357 = 459

س = 459 ÷ 51 = 9 أقساط

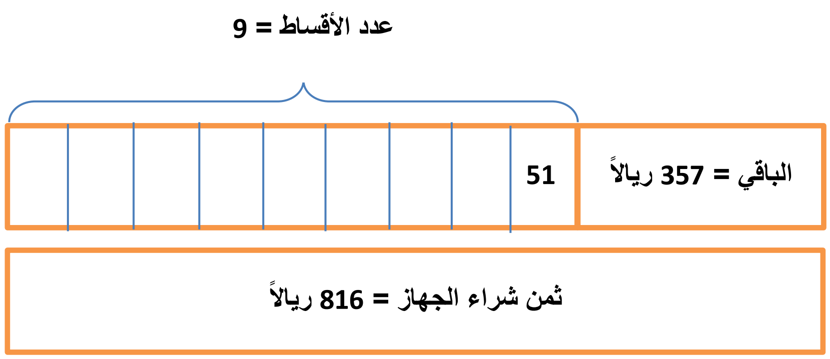
ثانيًا: طريقة رسم نموذج بصورة مختصرة:



يتبين من رسم النموذج أن إجمالي ما دفعه شهريًا = 816 − 357 = 459 ريالاً

ثم يتم تقسيم 459 إلى عدد من الأقساط، كل قسط قيمته 51 ريالًا.

عدد الأقساط = 459 ÷ 51 = 9 أقساط.



وعلى ضوء هذه الأنماط العديدة للمسائل الجبرية فإن الباحث يوصي بضرورة تدريب التلاميذ على رسم نموذج قبل الحل بالرموز الجبرية.

فرضيات الدراسة:

1. يوجد فرق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية وتلاميذ المجموعة الضابطة عند مستوى دلالة معنوية (أقل من 0.05) في التطبيق البعدي للاختبار التحصيلي في وحدة المعادلات الجبرية.
2. يحقق استخدام مدخل رسم نموذج درجة كبيرة من الفاعلية في تنمية مستوى تحصيل تلاميذ المجموعة التجريبية في حل المعادلات الجبرية.

إجراءات الدراسة

عينة الدراسة:

تم اختيار مجتمع الدراسة من بين تلاميذ المرحلة المتوسطة بمحافظة وادي الدواسر لتطبيق أدوات الدراسة، حيث تم اختيار ثلاث مدارس من المدارس المتوسطة التابعة لإدارة التعليم بمحافظة وادي الدواسر التابعة لمنطقة الرياض بالمملكة العربية السعودية (متوسطة كمده – متوسطة الشرافاء – متوسطة تحفيظ النويعمة)، وكان الصف الثاني المتوسط المستوى الدراسي الذي تم اختياره لتطبيق الدراسة؛ نظرًا لمناسبة محتوى الرياضيات مع هدف الدراسة، وكانت العينة مكونة من جميع طلاب الصف الثاني المتوسط بالمدارس (82) طالبًا، والذين تم توزيعهم إلى مجموعتين، إحداهما: ضابطة (40) طالبًا، والثانية: تجريبية (42) طالبًا. وجدول (1) يوضح توزيع عينة الدراسة على المدرستين.

جدول (1): توزيع عينة الدراسة على مدارس التطبيق

	متوسطة كمدة	متوسطة الشرافاء	متوسطة تحفيظ النويعمة	المجموع
المجموعة الضابطة	14	9	17	40
المجموعة التجريبية	13	10	19	42
المجموع	29	19	34	82

ضبط المتغيرات الدخيلة:

أولًا: بالنسبة لمستوى التحصيل:

تم تطبيق الاختبار التحصيلي في المعادلات الجبرية قبل تنفيذ تجربة الدراسة، ثم تم حساب قيمة F حسب اختبار ليفين Leven واختبار t-Test لحساب دلالة الفرق بين متوسطي درجات التلاميذ في المجموعتين (التجريبية – الضابطة) وكانت النتائج كما هو موضح في جدول (2).

جدول (2): ضبط عامل التحصيل بين مجموعتي الدراسة (التجريبية – الضابطة)

	العدد	المتوسط	الانحراف المعياري	F	الدلالة	T	الدلالة
تجريبية	42	9.48	3.17	0.006	0.939	0.535	0.68
ضابطة	40	9.90	2.9				

يتبين من جدول (2) أن قيمة F غير دالة عند مستوى دلالة 0.05، كما أن قيمة T غير دالة عند مستوى دلالة 0.05، وعليه اطمئن الباحث إلى تكافؤ مجموعتي الدراسة (التجريبية – الضابطة) بالنسبة للتحصيل في المعادلات الجبرية.

ثانيًا: بالنسبة للعمر الزمني:

تم الاطلاع على سجلات التلاميذ بالصف الثاني المتوسط بمدارس التطبيق، وتم استبعاد التلاميذ ذوي الأعمار خارج النطاق الزمني (13 – 14) سنة.

ثالثًا: بالنسبة للبيئة التعليمية:

تم اختيار مدارس التطبيق من بيئة متقاربة ثقافيًا واقتصاديًا واجتماعيًا.

رابعًا: بالنسبة للتدريس:

قام الباحث بتدريب معلمي الرياضيات في مدارس التطبيق على استخدام مدخل رسم نموذج في حل المعادلات، وتم تزويدهم بدليل المعلم، وبالتالي قام كل معلم بالتدريس للمجموعتين (التجريبية – الضابطة).

إعداد أدوات الدراسة وضبطها سيكومتريًا:

1. دليل المعلم:[1]

تم إعداد دليل للمعلم لتيسير التدريس وفق المدخل السنغافوري، ومن خلال هذا الدليل تم توضيح خطة السير في الدرس طبقا لخطوات المدخل لرسم نموذج لحل المعادلات الجبرية.

وقد تكون الدليل من العناصر الآتية:

- عنوان الدليل.
- مقدمة الدليل.
- الهدف من الدليل.
- مقدمة نظرية عن المدخل السنغافوري لرسم نموذج.
- خطوات المدخل السنغافوري لرسم نموذج لحل المعادلات الجبرية.
- عرض أنماط استخدام المدخل في حل المعادلات الجبرية.
- بطاقة ملاحظة أداء الطالب أثناء حل المعادلات باستخدام رسم نموذج.

2. اختبار تحصيلي في وحدة المعادلات الجبرية[2]:

تم إعداد الاختبار في صورة مجموعة من المسائل الجبرية اللفظية، بحيث يتناسب مستوى صعوبة المسائل مع المرحلة العمرية للتلاميذ، وتخدم موضوعات مقرر الصف الثاني المتوسط، ويهدف الاختبار قياس مستوى التلاميذ في حل المعادلات الجبرية.

وللتأكد من صدق الاختبار تم عرضه على مجموعة من المحكمين، المتخصصين في تدريس الرياضيات (معلمون – موجهون – أعضاء هيئة تدريس)[3]، وفي ضوء آرائهم ومقترحاتهم تم حذف بعض المسائل وتعديل بعضها، حتى أصبح الاختبار في صورته النهائية مكونا من (10) مسائل لفظية، وتم احتساب 7 درجات لكل مسألة، وعليه تكون الدرجة الكلية للاختبار 70 درجة.

كما تم التأكد من ثبات الاختبار بتطبيقه على مجموعة استطلاعية من تلاميذ الصف الثاني المتوسط (غير مجموعة الدراسة) بحساب معامل ألفا كرونباخ، وقد وجد أن معامل ثبات الاختبار يساوي (0.92) للاختبار ككل، مما يشير إلى أن الاختبار له درجة ثبات مقبولة. كما تم حساب معامل السهولة والصعوبة لكل مفردة من مفردات الاختبار باستخدام معادلتي السهولة والصعوبة، وتراوحت معاملات السهولة بين 0.45 – 0.67 وهي تعد معاملات سهولة مقبولة.

---

[1] انظر ملحق4: دليل المعلم للتدريس وفق المدخل السنغافوري.

[2] انظر ملحق3: الاختبار التحصيلي في المعادلات الجبرية.

[3] انظر ملحق2: أسماء السادة المحكمين على أدوات البحث.

تنفيذ تجربة الدراسة:

بعد أخذ الموافقات اللازمة لتنفيذ تجربة الدراسة[1]، تم تنفيذ التجربة وفق التصميم التجريبي التالي:

التطبيق القبلي لأداة الدراسة (اختبار تحصيلي في المعادلات الجبرية) على مجموعتي الدراسة (الضابطة والتجريبية)

⇓

تدريس وحدة (المعادلات) لمجموعتي الدراسة (للمجموعة الضابطة بالطريقة الجبرية فقط. وللمجموعة التجريبية باستخدام المدخل السنغافوري لرسم نموذج)

⇓

التطبيق البعدي لأداة الدراسة (اختبار تحصيلي في المعادلات الجبرية) على مجموعتي الدراسة

شكل (1): التصميم التجريبي للدراسة

قام الباحث بعقد 3 جلسات تدريبية لتدريب معلمي الرياضيات على تدريس وحدة المعادلات وفق المدخل السنغافوري، والتأكد من ممارساتهم التدريسية الصحيحة وفق هذا المدخل، بعد ذلك بدأت تجربة الدراسة (التدريس وفق المدخل السنغافوري لرسم نموذج للمجموعة التجريبية، والتدريس وفق الطريقة الجبرية التقليدية للمجموعة الضابطة)، حيث استغرقت التجربة 7 أسابيع، بمعدل 3 حصص أسبوعيًا، أي إجمالي 21 حصة[2].

نتائج الدراسة:

بعد الانتهاء من تطبيق أدوات الدراسة قبليًا وبعديًا تم رصد الدرجات، وتحليل النتائج وتفسيرها على النحو التالي:

<u>للإجابة عن السؤال الأول:</u> والذي نصه هل يوجد فرق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية والضابطة في الاختبار التحصيلي في المعادلات الجبرية يعزى لطريقة الحل (جبرية رمزية – رسم نموذج)؟ تم حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري وقيمة (ت) لدرجات تلاميذ المجموعة التجريبية ودرجات تلاميذ المجموعة الضابطة في التطبيق البعدي للاختبار التحصيلي في المعادلات الجبرية؛ لمعرفة اتجاه الفروق ودلالتها الإحصائية، وكانت النتائج كما هي مبينة بالجدول (3).

جدول (3): نتيجة اختبار (ت) لدلالة الفرق بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية وتلاميذ المجموعة الضابطة في التطبيق البعدي للاختبار التحصيلي في المعادلات الجبرية

البيان	عدد التلاميذ	درجة الحرية	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري	قيمة ت المحسوبة	مستوى الدلالة
المجموعة الضابطة	40	80	41.95	10.38	4.9	دالة عند مستوى 0.05
المجموعة التجريبية	42		51.95	7.4		

[1] انظر ملحق1: خطابات الموافقة على تنفيذ تجربة الدراسة ميدانيًا.

[2] انظر ملحق5: صور فوتوغرافية توضح طريقة التلاميذ في المجموعة التجريبية لرسم نموذج أثناء تنفيذ تجربة الدراسة.

يتضح من جدول (3) أنه يوجد فرق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي درجات المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة لصالح المجموعة التجريبية في التطبيق البعدي للاختبار التحصيلي في المعادلات الجبرية، حيث بلغت قيمة ت المحسوبة (4.9) وهي دالة عند مستوى دلالة (0.05) لدلالة الطرفين ودرجة حرية (80)، وبذلك يتم قبول الفرض الأول.

وهذه النتيجة تدعو الباحث لقبول صحة فرضية الدراسة، ونصها: يوجد فرق ذو دلالة إحصائية بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية وتلاميذ المجموعة الضابطة عند مستوى دلالة (أقل من 0.05) في التطبيق البعدي للاختبار التحصيلي في وحدة المعادلات الجبرية.

وللإجابة عن السؤال الثاني، والذي نصه: "هل توجد فاعلية بدرجة مقبولة لمدخل رسم نموذج في تنمية مهارات حل المعادلات الجبرية لدى تلاميذ المرحلة المتوسطة؟ فقد تم حساب مربع إيتا وحجم تأثير المدخل السنغافوري لرسم نموذج في حل المسائل الجبرية، كما هو مبين في جدول (4).

جدول (4): قيمة مربع إيتا وحجم تأثير المدخل السنغافوري لرسم نموذج في حل المعادلات الجبرية

المجموعة	ن	ت	درجة الحرية	$\eta 2$	D
التجريبية	42	40.89	41	0.724	3.2

يتضح من جدول (4) أن حجم التأثير D للمدخل السنغافوري لرسم نموذج في حل المعادلات الجبرية قد بلغ (3.2) وبالرجوع إلى الجدول المرجعي المقترح لتحديد حجم التأثير (منصور، 1997، 64-65) (عصر، 2003، 667) فإن هذه القيمة كبيرة، كما تشير قيمة η^2 إلى أن 72.4% من التباين في المتغير التابع (حل المعادلات الجبرية) يرجع إلى تأثير المتغير المستقل (استخدام مدخل رسم نموذج).

ويمكن إرجاع هذه النتيجة إلى تأثير مدخل رسم نموذج في فهم التلاميذ للمسألة الجبرية، وإقبالهم الشديد على محاولة رسم أكثر من نموذج للتعبير عن العلاقة بين متغيرات المسألة، وبالتالي يسهل عليهم حل المعادلات بطريقة أسهل وأفضل من الطريقة المجردة في حل المعادلات الجبرية التي يعاني منها كثير من التلاميذ.

وهذه النتيجة تدعو الباحث لقبول صحة الفرضية الثانية، ونصها: "يحقق استخدام مدخل رسم نموذج درجة كبيرة من الفاعلية في تنمية مستوى تحصيل تلاميذ المجموعة التجريبية في حل المعادلات الجبرية".

وللإجابة عن السؤال الثالث، والذي نصه: ما معتقدات المعلمين منفذي تجربة الدراسة حول مدخل رسم نموذج؟ تم تفريغ وتحليل المقابلات الفردية مع معلمي الرياضيات، وكان من أبرز تعليقات معلمي الرياضيات على استخدام المدخل السنغافوري في حل المعادلات الجبرية ما يلي:

- ساعدني هذا المدخل في جذب انتباه التلاميذ للتعلم.
- استطعت من خلال هذا المدخل توضيح العلاقة بين متغيرات المسألة الجبرية.
- أسهم هذا المدخل في علاج بعض نقاط الضعف الموجودة لدى التلاميذ ضعاف التحصيل.
- بالرغم من طول المدة الزمنية لهذا المدخل إلا أنني استطعت التدريب عليه واستخدامه بشكل فعَّال.
- من خلال أوراق العمل المتوفرة في هذا المدخل أصبحت البيئة التعليمية نشطة.
- أوصي بتصميم معامل للرياضيات تتيح التعلم وفق هذا المدخل العملي في تعلم الرياضيات.
- ينبغي زيادة الوقت المحدد لحصة الرياضيات؛ حتى يتسنى للتلاميذ التدريب الكافي على هذا المدخل.
- ينبغي تعميم هذا المدخل منذ المراحل الأولى من التعليم العام؛ حتى يتعود التلاميذ على استخدامه بشكل مستمر في تعلم الرياضيات.

وللإجابة عن السؤال الرابع، والذي نصه: ما معتقدات التلاميذ في المجموعة التجريبية من عينة الدراسة حول مدخل رسم نموذج؟ تم تفريغ وتحليل المقابلات الجماعية مع تلاميذ المجموعة التجريبية في مدارس التطبيق، وكان من أبرز تعليقات التلاميذ على استخدام المدخل السنغافوري في حل المعادلات الجبرية ما يلي:

- لم أشعر بالملل عند استخدامي لهذا المدخل.
- لقد انقضت الحصة سريعًا، وكنت أتمنى أن تطول أكثر.
- كنت أكره الرياضيات، والآن بدأت أحبها.
- كنت أتمنى أن أتدرب على استخدام هذا المدخل منذ بداية المرحلة الابتدائية.
- لقد بدأت أفهم معنى المعادلات الجبرية مع هذا المدخل.
- إني أحب الرسم، وهذا المدخل يتوافق مع ميولي واتجاهاتي في التعلم.

تفسير النتائج ومناقشتها:

تشير النتائج في مجملها إلى أن استخدام مدخل رسم نموذج له أثر كبير في تنمية مهارات حل المعادلات الجبرية لدى تلاميذ المرحلة المتوسطة. كما أشارت الدراسة إلى أهمية هذا المدخل في تحويل الصورة المجردة لمفاهيم الرياضيات إلى صورة رسومية أقرب للتصور والإدراك، مما ساعد التلاميذ على فهم العلاقات بين المتغيرات المتضمنة في أي مسألة جبرية.

وتتفق نتائج الدراسة الحالية مع دراسات كل من: وولف (2003) Wolfe، سين (2017)Sin، مورين (2014) Morin، ماهوني (2012) Mahoney، جيرمان (2010) Jerman بالنسبة للدور الفعال للمدخل السنغافوري لرسم نموذج في تنمية التحصيل ومهارات حل المسائل اللفظية، كما تتفق نتائج الدراسة الحالية مع دراسة بلالوك (2011) Blalock بشأن زيادة المعرفة والمتعة في الرياضيات، كما تتفق الدراسة الحالية مع توصيات دراسة تيرويل وآخرين (2009) .Terwel et al، مينج (2008) Ming في أفضلية ترك الفرصة للتلاميذ لتصميم نماذج رسم لحل مسائل الرياضيات بمفردهم تحت إشراف معلم الرياضيات.

كما تتفق الدراسة الحالية مع نتائج دراسة آلين .(2008) Allen من حيث أن هذا المدخل له أثر قوي في تنمية معلمي الرياضيات مهنيًا وتغيير العديد من مفاهيم الرياضيات والممارسات التدريسية لديهم، وهذا ما أشارت إليه انطباعات المعلمين بعد تنفيذ تجربة الدراسة.

أما بالنسبة لأهمية تطوير المدخل السنغافوري في رسم نموذج بالاستعانة بالوسائط المتعددة الالكترونية فقد اتفقت توجهات الدراسة الحالية مع نتائج دراسة كل من لووي وليم (2009) Looi& Lim، ودراسة عبد الحي (2013).

خامسًا: توصيات الدراسة:

في ضوء النتائج التي توصلت إليها الدراسة الحالية يقدم الباحث التوصيات التالية للميدان التعليمي:

1. تدريب التلاميذ من بداية المرحلة الابتدائية على استخدام مدخل رسم نموذج في تعرف الأعداد والعمليات عليها.
2. إقامة دورات تدريبية للمعلمين على استخدام مدخل رسم نموذج في تدريس الرياضيات.
3. تزويد المعلمين بأدلة تساعدهم في تدريس الرياضيات باستخدام مدخل رسم نموذج.
4. تطوير كتب الرياضيات المدرسية في ضوء مناهج الرياضيات السنغافورية.
5. إتاحة الفرصة للتلاميذ لتعلم الرياضيات بطرق مشوقة تتوافق مع أنماط تعلمهم.
6. تمديد زمن حصة الرياضيات بحيث تسمح للتلاميذ التدريب الكافي على استراتيجية رسم نموذج، حتى يصل نسبة كبيرة من التلاميذ إلى مستوى التمكن من مفاهيم الرياضيات والتطبيقات عليها.
7. ينبغي تصميم معامل للرياضيات في كل مدرسة –على غرار الدول المتقدمة – تتيح التعلم وفق هذا المدخل العملي في تعلم الرياضيات.

سادسًا: مقترحات الدراسة:

في ضوء النتائج التي تم التوصل إليها، واستكمالاً للدراسة الحالية يوصي الباحث بإجراء المقترحات البحثية المستقبلية التالية:

- فاعلية المدخل السنغافوري لرسم نموذج في تنمية مهارات عليا للتفكير في الرياضيات.
- تطوير منهج الرياضيات بالمرحلة المتوسطة بالمملكة العربية السعودية في ضوء النموذج السنغافوري.
- فاعلية النموذج السنغافوري في علاج ذوي صعوبات التعلم الأكاديمية في الرياضيات.
- فاعلية برنامج حاسوبي قائم على النموذج السنغافوري في رفع مستوى التحصيل في الرياضيات في المرحلة الابتدائية.
- برنامج تدريبي لمعلمي الرياضيات على استخدام المدخل السنغافوري لرسم نموذج في تعليم الرياضيات.

المَراجِعُ

المراجع العربية:

زهران، العزب محمد (2004). فعالية استخدام استراتيجيات ما وراء المعرفة في تنمية مهارات حل المشكلات الرياضية لدى طلاب الصف الأول الثانوي، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، مجلة تربويات الرياضيات، 7 (1)، 9- 45.

عبد الحي، زيزي السيد عبد العزيز (2013). استخدام نموذج الرسم في تنمية تحصيل التلاميذ ذوي صعوبات تعلم الرياضيات بالصف الرابع الابتدائي. مجلة التربية الخاصة – مركز المعلومات التربوية والنفسية والبيئية بكلية التربية جامعة الزقازيق – مصر , ع3، 224-273.

عصر، رضا مسعد السعيد (2003). حجم الأثر: أساليب إحصائية لقياس الأهمية العملية لنتائج البحوث التربوية، المؤتمر العلمي الخامس عشر، مناهج التعليم والإعداد للحياة المعاصرة، 21- 22 يوليو، جامعة عين شمس.

غفور، كمال إسماعيل (2012). الصعوبات التي تواجه الطلبة في حل المسائل الرياضية للصف الثالث إعداد المعلمين والمعلمات من وجهة نظر الطلبة. مجلة الفتح: ديالي، العراق، ع48، 317-333.

المجيدل، عبد الله واليافعي، فاطمة عبد الله (2009). صعوبات تعلُّم الرياضيات لدى تلاميذ الحلقة الأولى من التعليم الأساسي في ظفار من وجهة نظر معلمات الرياضيات "دراسة ميدانية". مجلة جامعة دمشق، مج25، العدد (3،4)، 135-177.

منصور، رشدي فام (1997). حجم التأثير الوجه المكمل للدلالة الإحصائية. المجلة المصرية للدراسات النفسية، مج (7)، 57 – 75.

ويكيبيديا، الموسوعة الحرة (2018). https://ar.wikipedia.org/wiki

المراجع الأجنبية:

Allen, Janet Ginkus (2008). How The Emphasis Of Models, Themes, And Concepts In Professional Development Changed Elementary Teachers' Mathematics Teaching And Learning. A Dissertation Presented To The Graduate School Of The University Of Massachusetts Amherst In Partial Fulfillment Of The Requirements For The Degree Of Doctor Of Education.

Arcavi, Abraham; Drijvers, Paul and Stacey, Kaye (2017). The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights and Activities. Routledge, London and New York. https://books.google.com.sa/books.

Bell, A., Malone, J.A., & Taylor, P.C. (1987). Algebra—an exploratory teaching experiment. Nottingham, England: Shell Centre for Mathematical Education.

Bisk, Richard (2007). Visual Manipulatives: Create Mathematical Coherence for K-8 Students Using Model Drawings. Available online at: *wwwfac.worcester.edu/smip*.

Blalock, Jenny Taliaferro (2011). The impact of Singapore Math on student knowledge and enjoyment in mathematics. Dissertations Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the degree Doctor of Education, College of Education Louisiana Teach University. ProQuest Dissertations and Theses.

Chua, Aaron (wd). 9 Secrets to Master the Singaporean Math Model. E-book, Available online at: https://www.koobits.com/ 25 Feb. 2018.

Ciobanu, Mirela.(2015). In The Middle: Using Model-Drawing Approach For Solving Word Problems Singapore's. false *Gazette - Ontario Association for Mathematics*; Caledon Vol. 53, Iss. 4, 17-20.

Clark, A. (2011). Singapore Math: A Visual Approach to Word Problems, Available online at: www.hmheducation.com/mathinfocus.

Dictionary.reference.com (2018).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103–131. Retrieved from http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Elizabeth S. Wolfe, (2003). Integrating Art in Math and Science Curriculum.

Ferrucci, B.J., Kaur, B., Carter, J. A,. & Yeap, B.H. (2008). Using a model approach to enhance algebraic thinking in the elementary school mathematics classroom. In C.E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), Algebra and algebraic thinking in school mathematics (pp 195-209). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Gasco, Javier & Villarroel, José Domingo (2012). Algebraic problem solving and learning strategies in compulsory secondary education. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 46, 612 – 616. Available online at: www.sciencedirect.com

Ginsburg, Alan L. & Leinwand, Steven & Anstrom, Terry & Pollock, Elizabeth & Witt, Elizabeth (2005). What the United States Can Learn from Singapore's World-Class Mathematics System (and what Singapore can learn from the United States): An Exploratory Study. Washington: American Institutes for Research, Web. 24 Feb. 2018.

Jerman, Olga (2010). Model-Drawing Strategy to Solve Word Problems for Students with LD. IARLD Conference, Miami, Florida, January 14-16.

Kaur, B. (2014). Evolution of Singapore's school mathematics curriculum. 37th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated (MERGA 2014) on "Curriculum in Focus: Research Guided Practice", Sydney, Australia, 29 June to 3 July 2014

Kho,T.H.(2007). The model-drawing method with algebra. In Teaching Secondary School Mathematics: A Resource Book (ed.P.Y.Lee), pp.393–412.McGraw-Hill Education, Singapore. www.math.harvard.edu/.../MathS305/Singapore

Lee, K. & Fong, S. (2011). Neuroscience and the Teaching of Mathematics. Educational Philosophy and Theory, Vol. 43, No. 1, p. 81-86.

Leinwand, Steven& Ginsburg, Alan L. (2007). Learning from Singapore Math. Educational Leadership, November, Pp32-36.

Lesh, R. A., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective in mathematics teaching and learning. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling and local conceptual development. Mathematical Thinking and Learning, *5*(2-3), 157-189.

Lew, Hee-Chan (2004). Developing Algebraic Thinking in Early Grades: Case Study of Korean Elementary School Mathematics. The Mathematics Educator, Vol.8, No.1, 88 – 106.

Looi, C. K.; Lim, K. S. (2009). From bar diagrams to letter-symbolic algebra: a technology-enabled bridging. Journal of Computer Assisted Learning, vol.25, 358–374.

Mahoney, K. (2012). Effects Of Singapore's Model Method On Elementary Student Problem Solving Performance: Single Subject Research A Thesis Presented To The School Of Education In Partial Fulfillment Of The Requirements For The Degree Of Doctor Of Education In The Field Of Curriculum And Instruction College Of Professional Studies Northeastern University Boston, Massachusetts December.

Ming, C. E. (2008). Using Model-Eliciting Activities for Primary Mathematics Classrooms. The Mathematics Educator, Vol. 11, No.1/2, 47-66.

Ministry of Education. (2001). Mathematics Syllabus-Primary School. Singapore: Curriculum Planning and Developmental Division.

Ministry of Education. (2007). Mathematics Syllabus-Primary School. Singapore: Curriculum Planning and Developmental Division.

Morin, Lisa L. (2014). Using Schematic-Based and Cognitive Strategy Instruction to Improve Math Word Problem Solving for Students with Math Difficulties. Submitted to the Faculty of Old Dominion University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, Special Education Concentration

Ng, S.F., & Lee, K. (2009). Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. Journal for Research in Mathematics Education.40(3), 282–313. Available online at: http://jstor.org/stable/40539338

North Carolina Teacher Academy (2009). Problem Solving with Model drawing. NCCTM's 39th Annual State Conference, October 30, Greensboro, NC. Available online at: www.teacheracademy.org

Puig, Luis (2010). Researching (Algebraic) Problem Solving from the Perspective of Local Theoretical Models. International Conference on Mathematics Education Research, Procedia Social and Behavioral Sciences, Vol.8, 3–16.

Reimers, Fernando & O'Donnell, E. B. (2017). Fifteen Letters on Education in Singapore: Reflections from a Visit to Singapore in 2015 by a Delegation of Educators from Massachusetts. Available online at: http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.

Sin, Yuen (2017). Customising 'Singapore maths' for use in schools abroad: NIE to study how Republic's approach can be better incorporated into foreign curriculum. The Straits Times; Singapore [Singapore]13 June 2017. Available online at:https://www.straitstimes.com/singapore/education/customising-spore-maths-for-use-in-schools-abroad.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. The Journal of Mathematical Behavior, *18*(2), 149-167. http://dx.doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00026-7

Terwela, Jan; Oersa, Bert van; Dijka, Ivanka van and Eedenb, Pieter van den (2009). Are representations to be provided or generated in primary mathematics education? Effects on transfer. Educational Research and Evaluation, Vol. 15, No. 1, February, 25–44.

Yeap, B.H. (2008). The Singapore mathematics curriculum and mathematical communication. Available online at www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/ape.